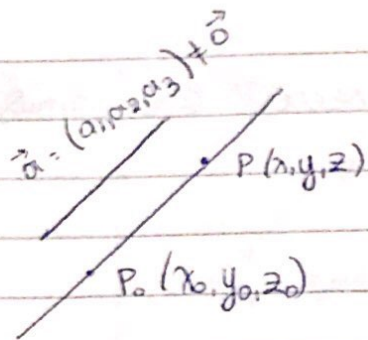


02/04/19



• Διανυσματική Εξίσωση:

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

• Παραμετρικές Εξισώσεις

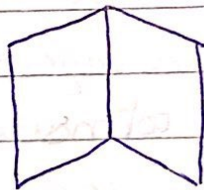
$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

• Συμμετρικές Εξισώσεις

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

Αναλυτικές Εξισώσεις

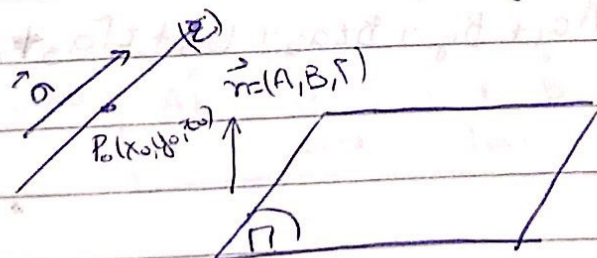
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$



Σχέσεις Δεξείας μιας ευθείας και ενός επιπέδου

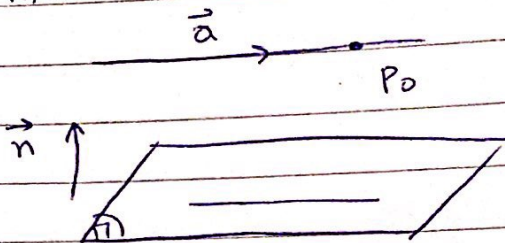
Δίνονται η ευθεία (ε) $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ και το

επίπεδο (Π) $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

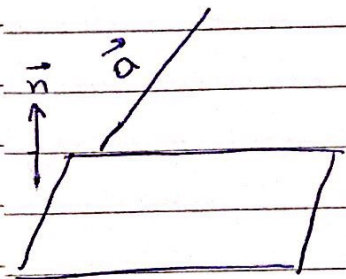


Το $\vec{n}$ είναι κάθετο στο Π και
το $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \parallel (\epsilon)$

Περίπτωση $\vec{n} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow (E) \parallel (\pi) \overset{\circ}{n} \overset{\circ}{a} (E) \text{ περιέχεται στο επίπεδο } (\pi)$



Περίπτωση $\vec{n} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \neq 0 \Rightarrow H (E) \text{ και } (E) \text{ τέμνονται σε ένα αριθμητικό σύνολο}$



$$A_0 + B_0 + \Gamma_0 \neq 0$$

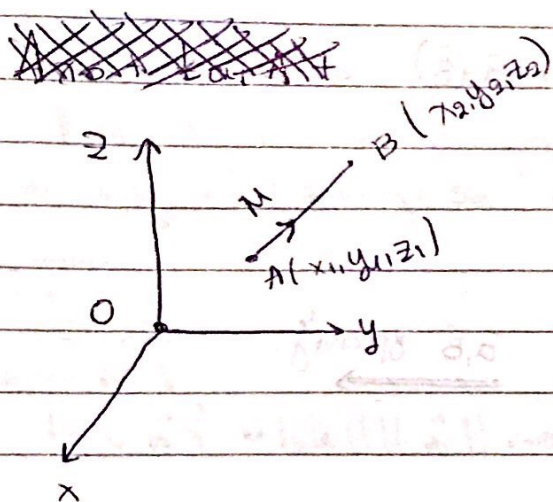
$$(E) : \begin{cases} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 + t a_3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Για να βρω τα στοιχεία του (E) με το (π) λύνω το σύστημα

$$\begin{cases} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 + t a_3 \\ Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 + t a_3 \end{cases}$$

$$Ax_0 + t A a_1 + B y_0 + t B a_2 + \Gamma z_0 + t \Gamma a_3 + \Delta = 0$$



$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ M } \text{liego} \text{ tou } AB &\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \\
 \vec{OM} - \vec{OA} &= \vec{OB} - \vec{OM} \Leftrightarrow \\
 2\vec{OM} &= \vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow \\
 \vec{OM} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}
 \end{aligned}$$

Προταση

Το σημείο M ευρείς liego του ευθυγράμμου τμήματος AB.

$$\Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$$

$M(x_M, y_M, z_M)$

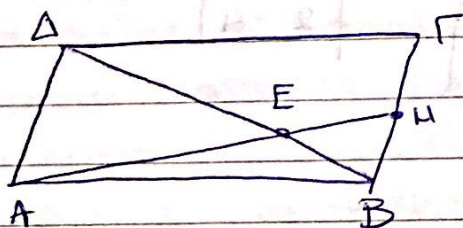
$$x_M = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)$$

$$y_M = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)$$

$$z_M = \frac{1}{2} (z_1 + z_2)$$

Ασκηση

Εστω παρλληλο ABCD και M liego της πλευρας BF.



Η διαγωνιος AB τελειει την AM στο σημείο E. Να δείχθει ότι E χωρίζει την διαγωνιο AB σε λόγο 2:1.

Λυση

$$\begin{aligned}
 \vec{AE} &= \mu \cdot \vec{EB} \quad \mu > 0 \Leftrightarrow \vec{AE} - \vec{AD} = \mu (\vec{AB} - \vec{AE}) \\
 \Leftrightarrow \vec{AE} - \vec{B} &= \mu \vec{A} - \mu \vec{AE} \Leftrightarrow (1 + \mu) \vec{AE} = \mu \vec{A} + \vec{B} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{AE} = \frac{\mu}{\mu+1} \vec{A} + \frac{1}{\mu+1} \vec{B}} \quad (1)$$

$$AE = \lambda \vec{AU} \xrightarrow{U \in \text{BG} \cap BF} \frac{\lambda}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{\lambda}{2} (\vec{a} + \vec{a} + \vec{b}) \iff$$

$$\boxed{AE = \lambda \vec{a} + \frac{\lambda}{2} \vec{b}} \quad (2)$$

$$\text{Απο (1), (2)} \Rightarrow \frac{1}{L+1} \vec{a} + \frac{1}{L+1} \vec{b} = \lambda \vec{a} + \frac{\lambda}{2} \vec{b} \xrightarrow{\vec{a}, \vec{b} \text{ γρ. ανεξ.}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L+1} = \lambda \\ \frac{1}{L+1} = \frac{\lambda}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{L+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{L=2}$$

Ασκηση

Δίνονται τα διανυσματα $\vec{a} = (1, 1, 4)$, $\vec{b} = (1, -2, 0)$, $\vec{\gamma} = (3, -3, 4)$
Είναι βάση του V_3 ;

Λυση

Υπολογίζω το ~~απλο~~ μέγεθος γινόμενο:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}] &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-4+4) = 0 \end{aligned}$$

Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι γρ. εξ. και άρα δεν είναι βάση του V_3

Άσκηση

Να βρεθεί η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της ποσότητας $f(x, y, z) = 2x - y + 3z$ όταν $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$

Λύση

Γερούμε:

$$|\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \Leftrightarrow -\|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \leq \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \leq \|\vec{u}\| \|\vec{w}\|$$

$$x^2 + y^2 + (2z)^2 = 1 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 1$$

$$\vec{u} = (x, y, 2z)$$

$$f(x, y, z) = 2x - y + 3z$$

$$= \langle (x, y, 2z), (2, -1, 3/2) \rangle$$

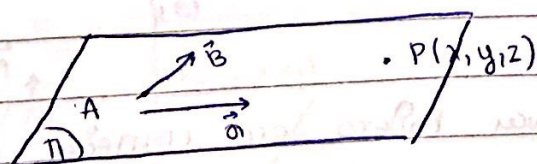
$$= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle, \text{ όπου } \vec{w} = (2, -1, 3/2)$$

$$\text{Η μέγιστη τιμή είναι } \|\vec{u}\| \|\vec{w}\| = 1 \cdot \sqrt{5 + 9/4}$$

$$\text{Η ελάχιστη τιμή είναι } -\|\vec{u}\| \|\vec{w}\| = \dots$$

Άσκηση

Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου (π) το οποίο διέρχεται από το σημείο $A(1, -1, 2)$ και είναι $\parallel$ προς τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (-1, 3, 4)$. Στην συνέχεια να βρεθούν οι παρακερικές ή η αναλυτική εξίσωση.



Λύση

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (6, -2, 3) \neq (0, 0, 0) \rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ γρ. ανεξ.}$$

Διανυσματική Έξισωση:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(1, 0, -2) + \mu(-1, 3, 4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = -1 + 3\mu \\ z = 2 - 2\lambda + 4\mu \end{cases}$$

Παραμετρικές Έξισώσεις:

$$\Leftrightarrow \lambda - \mu = x - 1$$

$$0 \cdot \lambda + 3\mu = y + 1$$

$$-2\lambda + 4\mu = z - 2$$

Αναλυτική Έξισωση

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 0 & 3 & y+1 \\ -2 & 4 & z-2 \end{vmatrix} = 0$$

Άλλος τρόπος

Το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b} = (6, -2, 3)$ είναι κάθετο στο επίπεδο. Άρα η αναλυτική Έξισωση είναι:

$$6(x-1) - 2(y+1) + 3(z-2) = 0$$

$$6x - 2y + 3z - 6 - 2 - 6 = 0$$

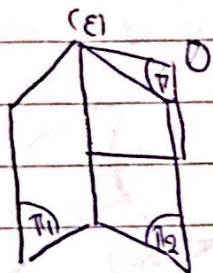
$$6x - 2y + 3z - 14 = 0$$

Άσκηση

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) το οποίο περιέχει την ευθεία

$$(E) \begin{cases} 3x - 2y + 6z - 6 = 0 & (\pi_1) \\ x - y + z + 4 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

και που διέρχεται από το $O(0,0,0)$



Λύση

Το ζητούμενο επίπεδο ανήκει στην ομογενή δεξιά της ευθείας (E) άρα έχει εξίσωση της μορφής:

$$(\pi) \quad \lambda(3x - 2y + 6z - 6) + \mu(x - y + z + 4) = 0$$

με $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

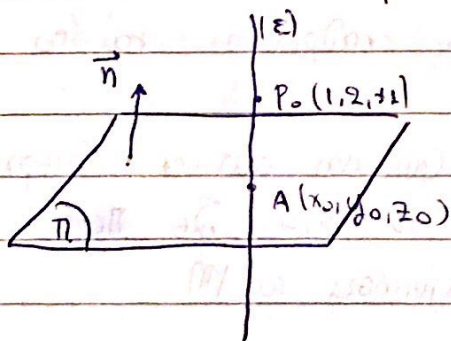
Αφού δέξω το $O(0,0,0) \in (\pi)$ πρέπει $-6\lambda + 4\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{2}\lambda$

$$(\pi) : \lambda(3x - 2y + 6z - 6) + \frac{3}{2}\lambda(x - y + z + 4) = 0 \quad \lambda \neq 0$$



Άσκηση

Να βρεθεί το γενικό τμήμα του επιπέδου $(\pi) : x + 2y - z = 0$ με την ταξινόμηση προς αυτό ευθεία (E) από το γενικό $P_0(1,2,1)$



Λύση

Έστω $A(x_0, y_0, z_0)$ το ζητούμενο σημείο του (π) με την
(Ε) η ευθεία (Ε) $\parallel \vec{n} = (1, 2, -1) \perp (\pi)$ ορα έχει συντεταγμένες
Εξισώσεις:

$$(Ε) \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1} = t$$

$$\Leftrightarrow x = 1+t$$

$$y = 2+2t$$

$$z = 1-t$$

παράμετρικες εξισώσεις

Το σημείο του (π) Α βρίσκεται συνιστώντας το σύστημα

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 1-t \end{cases}$$

$$1+t+2(2+2t)-(1-t)=0$$

$$\Leftrightarrow 6t+4=0 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

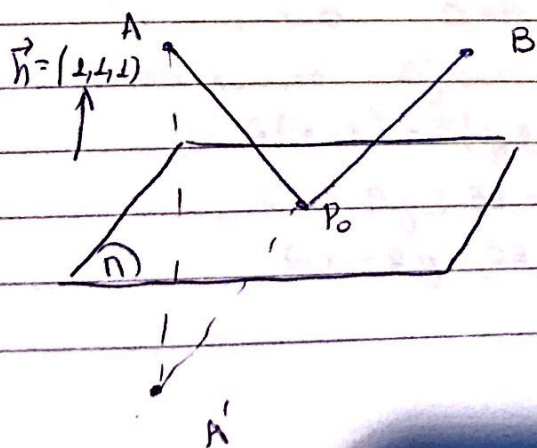
$$\text{Αρα } \begin{aligned} x &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Θεωρούμε επίπεδο (π) $x+y+z-1=0$ ως καθρέπτης και το
σημείο $A(0,0,3)$ ως φωτεινή πηγή.

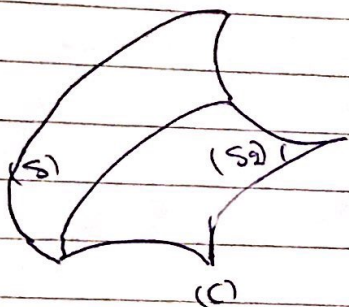
Η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα διέρχεται
από το σημείο $B(3,3,3)$. Σε ποιο
σημείο θα χτυπήσει το (π)



Ορισμός

Επιφάνεια καλείται το σύνολο των σημείων του χώρου των οποίων οι συντεταγμένες είναι λύση μιας εξίσωσης της μορφής $t(x, y, z) = 0$

Καμπύλη είναι $\in \mathbb{R}^3$ ορισμός η τομή 2 επιφανείων $(S_1), (S_2)$

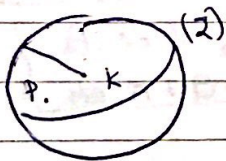


$$(C) : \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Σφαίρες

Ορισμός

Καλούμε σφαίρα (S) κέντρου K & ακτίνας r του γεωμετρικού τόπου των σημείων του χώρου που απέχουν από το K σταθερή απόσταση.



$$P \in (S) \Leftrightarrow d(P, K) = R$$

$$K(a, b, \gamma) \quad , \quad P(x, y, z)$$

$$d(P, K) = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2} \quad (S)$$